SESSION 2006

Concours d'admission en première année du Cycle de Formation d'Architectes de l'Institut National des Sciences Appliquées de Strasbourg

Épreuves écrites

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures - Coefficient : 2

Note : cette épreuve comprend deux exercices indépendants.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

EXERCICE I

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3.

On désigne par Id_E l'endomorphisme identité de E.
Pour tout endomorphisme u de E, le noyau de u est noté $\mathrm{Ker}(u)$.

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et v le vecteur de E tel que : $v = e_1 - e_2 + e_3$.
On désigne par f l'application de E vers E telle que pour tout vecteur x de E :

$$f(x) = x - 2\,(x_1 + x_2 + x_3)\,v$$

où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées de x dans la base B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice A de f dans la base B.
3. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
4. Soient f_1 et f_2 les endomorphismes de E définis par : $f_1 = f - Id_E$ et $f_2 = f + Id_E$.
   a. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_1)$ et de $\mathrm{Ker}(f_2)$.
   b. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f_1) \oplus \mathrm{Ker}(f_2)$.

EXERCICE II

A. Étude des intégrales de Wallis

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \ \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
3. En déduire que pour tout entier naturel p :
$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(p!)^2}\frac{\pi}{2^{2p+1}} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}2^{2p}.$$
4. Établir pour tout entier naturel n l'encadrement : $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
5. En déduire que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$ puis que :
$$\lim_{p\to+\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p)!^2 p} = \pi.$$

B. Formule de Stirling

On considère maintenant la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \frac{n!\ e^n}{n^n\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}$ puis que $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqslant 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est monotone à partir du rang n_0.
   a. Vérifier que pour tout entier $k > 1$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
   b. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier $n > 1$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$.
   Montrer que la suite (v_n) est bornée.
4. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est bornée et converge vers un réel strictement positif α.
5. En vous appuyant sur le résultat de la question 5. de la partie A, déterminer α et établir la formule de Stirling :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$